Etude d'une onde de choc

Un courant d'air fait claquer une porte ; il s'ensuit une onde de choc, à savoir la propagation à une vitesse V (inconnue) d'un plan de discontinuité, appelé ≪front d'onde≫. En aval de l'onde de choc, l'air est immobile et l'on connaît sa pression p_0, sa température T_0 et sa masse volumique μ_0. En amont l'air a une vitesse u (connue, perpendiculaire au plan de l'onde de choc : c'est la vitesse de la porte au moment où elle a claqué) et ses caractéristiques sont p_1, T_1 et μ_1 (inconnues).

Question 1:

Compter les inconnues ; combien faudra-t-il d'équations pour résoudre le problème ?

Cette question n'est absolument pas naïve. Trente-cinq ans d'expérience en tant qu'enseignant m'ont appris que, faute d'avoir pris conscience qu'ils avaient moins d'équations que d'inconnues, bien des élèves ont tourné en vain et en rond [1] dans d'infinis calculs ne débouchant sur aucune conclusion. Nous avons quatre inconnues (V, p_1, T_1 et μ_1), il nous faut quatre équations.

Question 2:

L'air est assimilé a un gaz parfait ; quelle relation en déduit-on entre données et inconnues du problème ?

De l'équation historique $P\,V = n\,R\,T$, avec $n = m/M$ (m, masse du gaz et M, sa masse molaire) et $\mu = m/V$, l'on [2] tire $p/\mu\,T = R/M$ d'où

$$\frac{p_1}{\mu_1\,T_1} = \frac{p_0}{\mu_0\,T_0} \qquad \text{(équation 1)}$$

Question 3:

Choisir explicitement un volume de contrôle pertinent puis un système fermé auquel on pourra appliquer un certain nombre de lois physiques. Au fait, combien et lesquelles ?

Comme dans tout phénomène unidirectionnel (la direction sera choisie comme axe Ox, orienté dans le sens de la vitesse u du gaz) dans un espace à trois dimensions, le volume sera classiquement un cylindre de génératrices parallèles à Ox avec une section de forme tout à fait arbitraire (pas forcément circulaire, veux-je dire) et d'aire S, cylindre limité par un ≪fond≫ et un ≪couvercle≫ dans deux plans d'abscisses x_1 et x_2. Ici, comme c'est le passage de l'onde qui provoque les phénomènes intéressants, le front d'onde devra, bien sûr, être dans le volume de contrôle pendant l'intervalle de temps $[t, t + \mathrm{d}t]$ où l'on étudiera le système. Si l'on appelle $X(t)$ l'abscisse du front d'onde, l'on aura donc $x_1 < X(t) < X(t + \mathrm{d}t) < x_2$

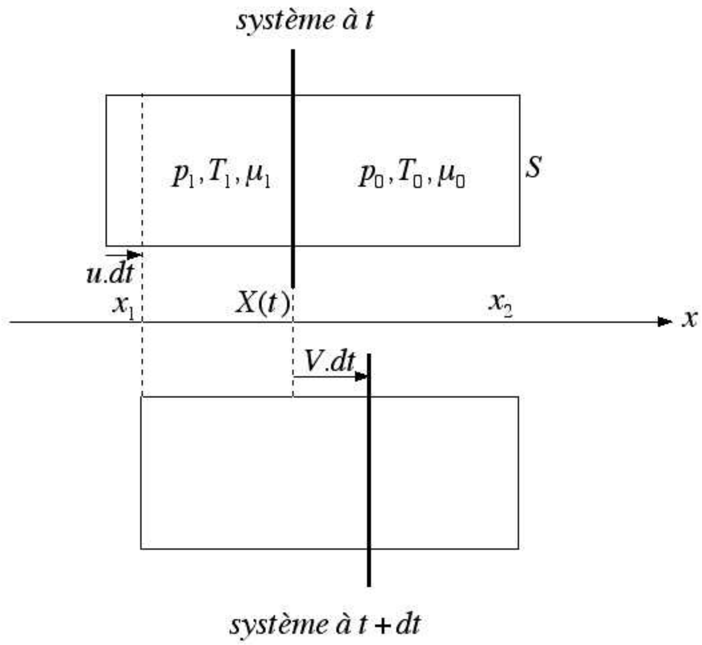
Du côté droit, l'air est immobile et ne traverse pas le plan d'abscisse x_2 ; rien n'entre dans le volume de contrôle ni n'en sort. Du côté gauche, l'air a la vitesse u et entre dans le volume de contrôle par le plan d'abscisse x_1.

Classiquement, le système est défini comme le contenu à l'instant t du volume de contrôle et de l'air qui va y entrer entre t et $t + \mathrm{d}t$ par la face d'abscisse x_1, air qui se trouve donc, à cet instant t, entre les abscisses $x_1 - u\,\mathrm{d}t$ et x_1 ; à ce même instant t, le front d'onde est à l'abscisse $X(t)$, l'air non perturbé (indice 0) se trouve entre les abscisses $X(t)$ et x_2 et l'air perturbé (indice 1) entre les abscisses $x_1 - u\,\mathrm{d}t$ et $X(t)$.

A l'instant $t + \mathrm{d}t$, le système est le contenu du volume de contrôle et, normalement, ce qui en est sorti par la face de droite, mais, ici, on vient de voir que rien ne sort par là ; donc le système est entre les abscisses x_1 et x_2. Puisque le front d'onde est désormais à l'abscisse $X(t + \mathrm{d}t) = X(t) + V\,\mathrm{d}t$, l'air

1. Ça, c'est un magnifique zeugma, non ?
2. ≪l'on tire≫, c'est suranné, par rapport à ≪on tire≫, mais n'est-ce pas là tout ce qui fait mon charme ?

non perturbé est entre les abscisses $X(t) + V\,\mathrm{d}t$ et x_2 et l'air perturbé est entre les abscisses x_1 et $X(t) + V\,\mathrm{d}t$.



Comme il nous manque trois équations, il nous faut trois lois physiques. On n'a guère le choix : la conservation de la masse (donc un bilan de masse), la loi fondamentale de la dynamique (donc un bilan de quantité de mouvement) et enfin un théorème énergétique (donc un bilan d'énergie).

Question 4:

Expliciter la conservation de la masse du système.

Le système contient une masse m_0 d'air non pertubé et une masse m_1 d'air perturbé dont on calcule les masses respectives par multiplication de la masse volumique par le volume.

A l'instant t, l'on a

$$m(t) = m_0(t) + m_1(t) = \mu_0\,S\,[x_2 - X(t)] + \mu_1\,S\,[X(t) - (x_1 - u\,\mathrm{d}t)]$$

A l'instant t, l'on a

$$m(t + \mathrm{d}t) = m_0(t + \mathrm{d}t) + m_1(t + \mathrm{d}t) = \mu_0\,S\,[x_2 - (X(t) + V\,\mathrm{d}t)] + \mu_1\,S\,[(X(t) + V\,\mathrm{d}t) - x_1]$$

Si l'on écrit la conservation de la masse par

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{m(t + \mathrm{d}t) - m(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

on obtient après simplifications et division par S

$$\mu_1\,(V - u) = \mu_0\,V \qquad \text{(équation 2)}$$

Question 5:

Faire, en projection sur Ox, un bilan de quantité de mouvement pour le système et lui appliquer la loi fondamentale de la dynamique

La quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse, nulle pour l'air non perturbé et u pour l'air perturbé, on a donc

$$p(t) = m_0(t) \times 0 + m_1(t) \times u = m_1(t)\, u = \mu_1\, S\, [X(t) - (x_1 - u\,\mathrm{d}t)]\, u$$

et de même

$$p(t + \mathrm{d}t) = m_1(t + \mathrm{d}t)\, u = \mu_1\, S\, [(X(t) + V\,\mathrm{d}t) - x_1]\, u$$

et l'on en tire

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{p(t + \mathrm{d}t) - p(t)}{\mathrm{d}t} = \mu_1\, S\, (V - u)\, u$$

soit en tirant parti de l'équation 2 (ce n'est pas obligatoire mais ça allégera les calculs)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \mu_0\, S\, V\, u$$

Cette dérivée de quantité de mouvement, en projection sur Ox, est la somme des forces horizontales, soit des forces de pression exercées sur les faces (du système) d'abscisses x_1 (force $F_1 = p_1\, S$) et x_2 (force $F_0 = -p_0\, S$). En simplifiant par S, la loi $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = F_1 + F_0$ conduit à

$$\mu_0\, V\, u = p_1 - p_0 \qquad \text{(équation 3)}$$

Question 6:

Faire un bilan énergétique pour le système et lui appliquer le premier principe de la thermodynamique après avoir expliqué pourquoi on le préfère au théorème de l'énergie cinétique.

On n'utilise pas le théorème de l'énergie cinétique car on a affaire à un gaz et la puissance des forces intérieures n'est pas nulle, le théorème est inutilisable. Utilisons le premier principe de la thermodynamique sous la forme qui tient compte des vitesses macroscopiques :

$$\mathrm{d}U + \mathrm{d}E_{cin} = \delta W + \delta Q$$

ou plutôt sous forme différentielle faisant intervenir les puissances mécanique et thermique :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = P_{\text{méca.}} + P_{\text{therm.}}$$

L'énergie cinétique est le produit de la masse par le demi-carré de la vitesse ; on procède comme pour la question précédente :

$$E(t) = m_0(t) \times 0 + m_1(t) \times \frac{u^2}{2} = m_1(t)\, \frac{u^2}{2} = \mu_1\, S\, [X(t) - (x_1 - u\,\mathrm{d}t)]\, \frac{u^2}{2}$$

et de même

$$E(t + \mathrm{d}t) = m_1(t + \mathrm{d}t)\, \frac{u^2}{2} = \mu_1\, S\, [(X(t) + V\,\mathrm{d}t) - x_1]\, \frac{u^2}{2}$$

et l'on en tire

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{E(t + \mathrm{d}t) - E(t)}{\mathrm{d}t} = \mu_1\, S\, (V - u)\, \frac{u^2}{2}$$

soit en tirant parti de l'équation 2

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mu_0\, S\, V\, \frac{u^2}{2}$$

Pour l'énergie interne, prenons pour simplifier un modèle où la capacité calorifique massique à volume constant (on la notera ici c sans indice) est constante entre T_0 et T_1, l'énergie interne massique, notée u, vérifiera donc $u(T_1) = u(T_0) + c\,(T_1 - T_0)$ que nous allégerons en $u_1 = u_0 + c\,(T_1 - T_0)$. La même méthode est appliquée :

$$U(t) = m_0(t)\, u_0 + m_1(t)\, u_1 = \mu_0\, S\, [x_2 - X(t)]\, u_0 + \mu_1\, S\, [X(t) - (x_1 - u\,\mathrm{d}t)]\, u_1$$

$$\dots$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\mu_0\, S\, V\, u_0 + \mu_1\, S\, (V - u)\, u_1$$

soit en tirant parti de l'équation 2

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \mu_0\, S\, V\, (u_1 - u_0) = \mu_0\, S\, V\, c\, (T_1 - T_0)$$

La puissance mécanique est le produit des forces par les vitesses des parois, soit

$$P_{\text{méca}} = F_1 \times u + F_2 \times 0 = p_1\, S\, u$$

La puissance thermique est nulle car en tout point de la surface du système, la température intérieure est égale à la température extérieure (T_0 à droite du front d'onde et T_1 à gauche) et que, sans différence de température, il n'y a pas d'échange thermique. Il est à noter que la différence de température de part et d'autre du front d'onde ne peut générer que des échanges thermiques *internes* au système et qu'on ne doit donc pas prendre en compte.

On reporte tout ce beau monde dans l'expression du premier principe, on simplifie par S et l'on tire :

$$\mu_0\, V\, \left[\frac{u^2}{2} + c\,(T_1 - T_0)\right] = p_1\, u \qquad \text{(équation 4)}$$

Question 7:

On suppose la perturbation faible et l'on pose $p_1 = p_0\,(1{+}x)$, $T_1 = T_0\,(1{+}y)$ et $\mu_1 = \mu_0\,(1{+}z)$ où x, y et z sont petits devant l'unité ; montrer que le rapport u/V est lui aussi petit devant l'unité. Que deviennent les équations au premier ordre ?

L'équation 2 peut se réécrire :

$$(\mu_1 - \mu_0)\, V = \mu_1\, u$$

soit en divisant par μ_0 :

$$z\, V = (1 + z)\, u \approx u$$

d'où $\dfrac{u}{V} \approx z$

L'équation 1 se réécrit :

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{T_1}{T_0}\, \frac{\mu_1}{\mu_0}$$

$$1 + x = (1 + y)\,(1 + z) \approx 1 + y + z$$

en négligeant le produit $y\,z$ du second ordre d'où

$$x = y + z \qquad \text{(équation 5)}$$

L'équation 3 se réécrit, avec $u = z\,V$:

$$\mu_0\,V^2\,z = p_0\,x \qquad \text{(équation 6)}$$

Enfin, l'équation 4 se réécrit :

$$\mu_0\,V\,\left[\frac{V^2}{2}\,z^2 + c\,T_0\,y\right] = p_0\,(1+x)\,V\,z$$

soit, en se limitant à l'ordre 1, et après simplification par V :

$$\mu_0\,c\,T_0\,y = p_0\,z$$

que l'on peut alléger grâce à l'équation d'état écrite sous la forme $p_0 = \dfrac{R}{M}\,\mu_0\,T_0 = r\,\mu_0\,T_0$ puis à $\dfrac{c}{r} = \dfrac{C_v}{R} = \dfrac{1}{\gamma - 1}$ d'où :

$$y = (\gamma - 1)\,z \qquad \text{(équation 7)}$$

On combine l'équation 5 et l'équation 7 pour en déduire $x = \gamma\,z$ que l'on reporte dans l'équation 6, on simplifie par z et l'on obtient :

$$V = \sqrt{\frac{\gamma\,p_0}{\mu_0}}$$

qui n'est rien d'autre que l'expression classique de la vitesse du son.

Remarquons que dans le cadre de cette approximation, V ne dépend que des caractéristiques du gaz au repos et pas du tout de la vitesse u. Par contre, la connaissance de u donne accès à $z = u/V = (\mu_1 - \mu_0)/\mu_0$ puis à $(p_1 - p_0)/p_0 = y = \gamma\,z$ et à $(T_1 - T_0)/T_0 = y = (\gamma - 1)\,z$; on a donc ainsi accès à p_1, T_1 et μ_1.

Question 8:

Etudier l'entropie créée par le passage de l'onde.

On note à partir de maintenant Σ l'aire de la section du volume de contrôle, pour éviter les confusions !

Si l'on appelle s l'entropie massique du gaz, la méthode de calcul précédente (voir surtout le calcul mené pour l'énergie interne) appliquée à l'entropie $S(t)$ du système conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \mu_0\,\Sigma\,V\,(s_1 - s_0)$$

Le second principe s'écrit :

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}S_{\text{échange}} + \mathrm{d}S_{\text{créée}} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}S_{\text{échange}} = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext.}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}S_{\text{créée}} > 0$$

Comme l'entropie échangée $\delta Q/T$ est nulle car δQ est nul (cf supra), $\mathrm{d}S = \mathrm{d}S_{\text{créée}}$; on voit apparaître la notion de vitesse surfacique de création d'entropie

$$\frac{1}{\Sigma}\,\frac{\mathrm{d}S_{\text{créée}}}{\mathrm{d}t} = \mu_0\,V\,(s_1 - s_0)$$

Avec l'expression classique de l'entropie massique, pour notre gaz parfait à c constant, $s = c\,\ln(T) + r\,\ln(V)$, l'on tire

$$s_1 - s_0 = c\,\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + r\,\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) = \frac{r}{\gamma - 1}\,\ln(1+y) + r\,\ln(1+x) \approx r\,\left[\frac{y}{\gamma-1} + x\right] = r\,(z + \gamma\,z)$$

finalement, avec $z = u/V$

$$\frac{1}{\Sigma}\,\frac{\mathrm{d}S_{\text{créée}}}{\mathrm{d}t} = \mu_0\,r\,(\gamma+1)\,u$$

En utilisant l'équation d'état sous la forme $p_0 = \mu_0\,r\,T_0$, on peut préférer :

$$\frac{1}{\Sigma}\,\frac{\mathrm{d}S_{\text{créée}}}{\mathrm{d}t} = (\gamma+1)\,\frac{p_0}{T_0}\,u$$